Przegląd Elektrotechniczny, R.82, Nr. 6/2006, 1-7

Leszek S. CZARNECKI
Department of Electrical and Computer Engineering, Louisianan State University, Baton Rouge, USA

Oscylacje energii a moce nieaktywne w świetle Teorii Składowych Fizycznych Prądu (CPC) oraz Twierdzenia Poyntinga

Streszczenie. *W artykule analizuje się domniemany związek między oscylacją energii a mocami niektywnymi w obwodach jedno- i trójfazowych z sinusoidalnym napięciem zasilania. Artykuł porównuje wnioski jakie można uzyskać odnośnie tego związku na podstawie Teorii Składowych Fizycznych Prądu (CPC) oraz Twierdzenia Poyntinga. Arykuł pokazuje, że interpretacja fizyczna mocy biernej jako skutek oscylacji energii jest błędna.*

Abstract. *Relations between energy oscillation and nonactive powers, such as the reactive, harmonic and unbalanced powers, are analyzed in this paper. Conclusions with respect to this relation that can be drawn based on the Currents' Physical Components (CPC) power theory and the Poynting Vector are compared in this paper as well. The paper shows that the physical interpretation of nonactive powers, and in particular the reactive power, as an effect of energy oscillation is erroneous.*

Słowa kluczowe: definicje mocy, fizyczna interpretacja mocy, moc bierna, moc niezrównoważenia, współczynnik mocy, CPC.
Keywords: power definitions, power physical interpretation, reactive power, unbalanced power, power factor, CPC.

Wstęp

Energię elektryczną wykorzystujemy od przeszło stu lat. Można by więc było oczekiwać, że jej przepływ nie ma dla nas, a przynajmniej dla tych, którzy zajmują się tym przepływem w badaniach lub w dydaktyce, zawodowo, żadnych niejasności.

Tymczasem nieustannie powraca pytanie, jaki jest związek między oscylacją energii a mocami w obwodach elektrycznych, a w szczególności, z mocą bierną Q i ze współczynnikiem mocy, $\lambda = P/S$, i ciągle różne są na takie pytanie odpowiedzi.

Wydaje się, że istnieje wśród inżynierów elektryków mocno utrwalone przekonanie, że moc bierna Q pojawia się w obwodach elektrycznych jako skutek oscylacyjnego przepływu energii elektrycznej między źródłem zasilania a odbiornikiem i ten właśnie, oscylacyjny przepływ energii, powoduje obniżanie współczynnika mocy.

Przyczyny takiego właśnie przekonania można by zapewne szukać w sposobie wyjaśniania właściwości energetycznych obwodów elektrycznych na pierwszych kursach elektrotechniki. Czyni się to zwykle omawiając przepływ energii i moce w jednofazowym obwodzie RLC z sinusoidalnym napięciem zasilania. Wprowadza się wtedy pojęcie mocy biernej i jej obecność kojarzy się z oscylacją energii między źródłem zasilania a elementami odbiornika mającymi zdolność jej gromadzenia w polu magnetycznym lub elektrycznym.

Taką interpretację ekstrapoluje się często, bez odpowiedniej analizy zjawisk, do wyjaśniania właściwości energetycznych obwodów o większej złożoności, w szczególności obwodów z odbiornikami generującymi harmoniczne prądu i obwodów trójfazowych, oraz o niesinusoidalnych przebiegach prądu i napięcia.

Przyczyną tego jest zarówno większa złożoność zjawisk energetycznych w takich obwodach jak i istniejące od dziesiątków lat kontrowersje odnośnie interpretacji fizycznej tych zjawisk jak i ich opisu matematycznego. Opis przepływu energii w takich obwodach wymaga wprowadzenia nowych wielkości energetycznych, różnych od mocy czynnej, zwanych niekiedy mocami nieaktywnymi (ang. nonactive powers).

Przekonanie, że źródłem tych mocy są oscylacje energii jest tak silne, że próby zakwestionowania takiego poglądu przez autora niniejszego artykułu [1, 2] spowodowały pojawienie się szeregu artykułów poszukujących oscylacji energii w obwodach i wyjaśnienia przy ich pomocy istnienia w obwodach mocy nieaktywnych. W tym celu sięgnięto nawet [3, 4, 5] do autorytetu Profesora Poynyinga i jego twierdzenia o wektorze powierzchniowej gęstości prędkości przepływu energii.

Rzeczywiście, dla tych, którzy uważają, że w obwodzie jednofazowym z liniowym, czasowo-niezmienniczym odbiornikiem zasilanym napięciem sinusoidalnym, moc bierna pojawia się jako skutek oscylacji energii, brak tych oscylacji na zaciskach zrównoważonego odbiornika trójfazowego o niezerowej mocy biernej Q, wygląda jak zaskakujący paradoks wymagający wyjaśnienia. Sięgając po Twierdzenie Poyntinga, autorzy prac [3, 4, 5] sięgają po podstawowe prawo rządzące przepływem energii w polach elektromagnetycznych, i z jego pomocą szukają potwierdzenia na istnienie oscylacji energii.

Tymczasem możemy mieć do czynienia nie z paradoksem w postaci braku oscylacji energii w obwodzie trójfazowym przy niezerowej mocy biernej, lecz z błędną interpretacją fizyczną mocy biernej w jednofazowym obwodzie RLC z sinusoidalnym napięciem zasilania. Tą błędną interpretacją może być po prostu tłumaczenie obecności mocy biernej Q w takim obwodzie jako wynik oscylacji energii. Wraz z odrzuceniem takiego wyjaśnienia, brak oscylacji energii w obwodzie trójfazowym przestaje być paradoksem.

Taka teza podważa jednak powszechną interpretację mocy biernej Q, utrwaloną dziesiątkami lat nauczania akademickiego, a także podważa sposób wprowadzania mocy biernej do elektrotechniki. Dlatego dowód tej tezy wymaga dużej ostrożności. Ten właśnie dowód jest przedmiotem niniejszego artykułu.

Moc bierna jest tylko jedną z mocy, określanych ogólnie jako *moce nieaktywne*. Wszystkie one kojarzone są z domniemanymi oscylacjami energii. Dlatego analiza w tym artykule dotyczy wszystkich mocy nieaktywnych, jednak przy założeniu, że napięcie zasilania ma przebieg sinusoidalny.

Narzędziem teoretycznym użytym w tej analizie jest teoria mocy oparta na koncepcji Składowych Fizycznych Prądu (ang. Currents' Physical Components, CPC), [6].

Ponieważ w artykułach [3, 4, 5] do wykazania istnienia oscylacji energii użyto Twierdzenia Poyntinga, w artykule niniejszym zostanie pokazane, że wynik ten otrzymano jedynie wskutek błędnego użycia tego twierdzenia. Poprawnie użyte Twierdzenie Poyntinga nie ujawnia w zrównoważonych obwodach trójfazowych żadnych oscylacji, niezależnie od wartości mocy biernej.

Powszechna interpretacja mocy biernej

Z licznych doświadczeń autora tego artykułu wynika, że inżynier elektryk, zapytany co to jest moc bierna *Q*, odpowiada najczęściej, że jest to ta moc, którą oblicza się ze wzoru *UI* sin φ. Nieco lepiej zorientowany odpowiada, że moc ta określa oscylacje energii, które pogarszają współczynnik mocy. Bardzo nieliczni, zwykle nauczyciele akademiccy elektrotechniki lub inżynierowie pracujący w ośrodkach badawczych odpowiadają, że jest to amplituda składowej przemiennej mocy chwilowej, $p(t)$.

Rzeczywiście, jeśli napięcie i prąd na zaciskach odbiornika jednofazowego mają przebieg

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \cos\omega_1 t\,,$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega_1 t - \varphi)\,,$$

to moc chwilowa $p(t)$ na tych zaciskach, czyli prędkość przepływu energii $W(t)$ ze źródła do odbiornika, ma przebieg

$$p(t) = \frac{d}{dt}W(t) = u(t)\, i(t) = 2UI\cos\omega_1 t\cos(\omega_1 t - \varphi)\,,$$

i może być rozłożona w sposób następujący

$$p(t) = UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega_1 t) + UI\sin\varphi\,\sin 2\omega_1 t =$$

$$= P(1-\cos 2\omega_1 t) + Q\sin 2\omega_1 t = p_{\mathrm{u}}(t) + p_{\mathrm{Q}}(t)\,.$$

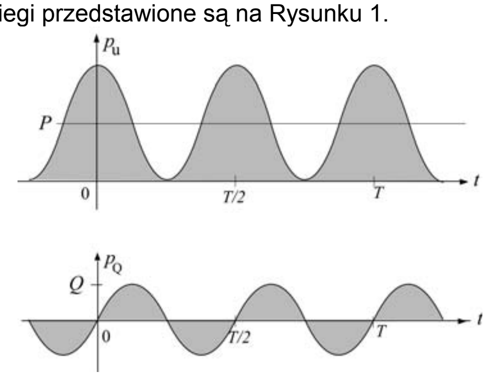
Moc chwilową $p(t)$ można więc rozłożyć na nieujemną składową

$$p_{\mathrm{u}}(t) = P\,(1-\cos 2\omega_1 t)\,,$$

oraz składową oscylacyjną

$$p_{\mathrm{Q}}(t) = Q\sin 2\omega_1 t\,,$$

której amplituda jest właśnie równa mocy biernej *Q*. Ich przebiegi przedstawione są na Rysunku 1.



Rys. 1. Składowa jednokierunkowa i składowa oscylacyjna mocy chwilowej, $p(t)$

Taka fizyczna interpretacja mocy biernej *Q* wydaje się być bardzo przekonywująca, gdyż można łatwo zgodzić się z poglądem, że oscylacje energii między źródłem i odbiornikiem stwarzają dodatkowe obciążenie dla źródła, a więc obniżają jego współczynnik mocy. Zapewne dlatego powyższa interpretacja jest bardzo głęboko zakorzeniona w środowisku elektrotechnicznym.

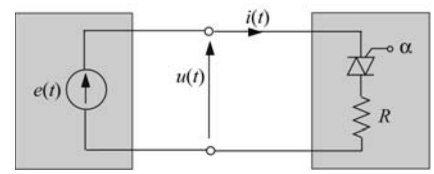
Wątpliwości odnośnie tej interpretacji zaczynają się pojawiać dopiero wtedy, gdy analizuje się przepływ energii w obwodach o zmiennych parametrach lub w obwodach trójfazowych.

Wątpliwości interpretacyjne

Rozważmy prosty obwód pokazany na Rysunku 2, z sinusoidalnym napięciem zasilania,

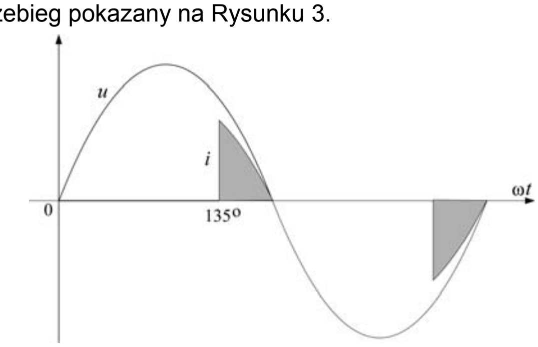
$$u(t) = 220\sqrt{2}\,\sin\omega_1 t \quad \mathrm{V},$$

w którym prąd rezystora o wartości $R = 1\ \Omega$ kontrolowany jest triakiem. Energetyczne właściwości tego obwodu były dyskutowane pierwotnie w artykule [2].



Rys. 2. Obwód z odbiornikiem rezystancyjnym o prądzie kontrolowanym triakiem

Przyjmując, że kąt zapłonu wynosi 135^0, prąd zasilania ma przebieg pokazany na Rysunku 3.



Rys. 3. Przebieg prądu i napięcia w obwodzie pokazanym na Rysunku 2, przy kącie zapłonu $\alpha = 135^0$

Wartość skuteczna prądu zasilania wynosi

$$\|i\| = 66{,}28\ \mathrm{A}.$$

A więc moc pozorna źródła zasilającego, to jest iloczyn wartości skutecznych prądu i napięcia ma wartość

$$S = \|u\|\,\|i\| = 220 \times 66{,}28 = 14{,}48\ \mathrm{kVA}.$$

Moc czynna na zaciskach odbiornika wynosi

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)\,dt = 2{,}86\ \mathrm{kW}\,,$$

a więc jest mniejsza od mocy pozornej, *S*, źródła. Muszą więc być w mocy pozornej moce nieaktywne, nie ma jednak w tym obwodzie oscylacji energii, gdyż moc chwilowa $p(t)$ w żadnej chwili czasu nie jest ujemna. Obserwując przebieg prądu i napięcia na Rysunku 3 łatwo bowiem zauważyć, że

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t)\,i(t) \geq 0\,.$$

Tak więc teza, że moce nieaktywne pojawiają się w obwodzie z powodu oscylacji energii, nie wydaje się być tezą prawdziwą.

Prąd zasilania w tym obwodzie ma, oprócz wyższych harmonicznych, składową podstawową o przebiegu

$$i_1 = 26{,}0\sqrt{2}\sin(\omega_1 t - 60^0)\ \text{A}\,.$$

Zgodnie z teorią mocy opartą na koncepcji Składowych Fizycznych Prądu (CPC) [6, 7], prąd zasilania ma trzy składowe fizyczne: prąd czynny, i_a, bierny, i_r, oraz prąd generowany w odbiorniku, i_h. Ponieważ napięcie zasilania jest sinusoidalne, nie ma w prądzie zasilania składowej rozrzutu. Z tego samego powodu prąd czynny oraz prąd bierny są prądami sinusoidalnymi o częstotliwości podstawowej. Tak więc

$$i = i_{1a} + i_{1r} + i_h$$

Prąd czynny, to jest składowa podstawowa prądu w fazie z napięciem zasilania, ma przebieg

$$i_{1a} = 13{,}0\sqrt{2}\sin\omega_1 t\ \ \text{A}\,.$$

Prąd bierny, to jest składowa podstawowa prądu przesunięta względem napięcia zasilania o ćwierć okresu, ma przebieg

$$i_{1r} = 22{,}5\sqrt{2}\cos\omega_1 t\ \ \text{A}\,.$$

Pozostałą składową prądu zasilania odbiornika jest prąd generowany w odbiorniku

$$i_h = i - i_1 = \sum_{n=2}^{\infty} i_n\,.$$

Spowodowany jest on odkształceniem prądu od przebiegu sinusoidalnego.

Prądy te są wzajemnie ortogonalne, a zatem ich wartości skuteczne spełniają relację

$$||i||^2 = ||i_{1a}||^2 + ||i_{1r}||^2 + ||i_h||^2\,, \qquad (1)$$

gdzie

$$||i_{1a}|| = 13{,}0\ \text{A}, \quad ||i_{1r}|| = 22{,}5\ \text{A},$$

oraz

$$||i_h|| = \sqrt{||i||^2 - ||i_{1a}||^2 - ||i_{1r}||^2} = 61{,}0\ \text{A}\,.$$

Mnożąc równanie (1) przez kwadrat wartości skutecznej napięcia zasilania otrzymuje się równanie mocy

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_h^2\,,$$

gdzie dla rozpatrywanego obwodu

$$P = ||u||\,||i_{1a}|| = 2{,}86\ \text{kW},$$

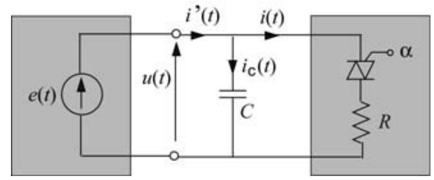
$$Q = ||u||\,||i_{1r}|| = 4{,}95\ \text{kvar},$$

$$D_h = ||u||\,||i_h|| = 13{,}42\ \text{kVA}.$$

Tak więc, moc pozorna S w analizowanym obwodzie zawiera dwie moce nieaktywne, moc bierną Q oraz moc harmonicznych generowanych w odbiorniku, D_h, przy jednoczesnym braku oscylacji energii między odbiornikiem a źródłem zasilania.

Pomimo takiego wyniku, mógłby ktoś jednak twierdzić, że moce nieaktywne pojawiły się w tym obwodzie dlatego, że są w nim oscylacje energii, związane, osobno, ze składową bierną, i_{1r} oraz ze składową generowaną i_h, lecz oscylacje te, identyczne co do wartości chwilowych, mają przeciwny zwrot i dlatego ich suma jest równa zeru. Lecz jeśli te, istniejące osobno, oscylacje powodują pojawienie się mocy biernej Q oraz mocy harmonicznych generowanych, D_h, to dlaczego te dwie moce mają odmienne wartości?

Trzeba też zauważyć, że pomimo braku oscylacji energii, moc bierna w powyższym obwodzie jest całkowicie kompensowalna. Kondensator włączony na zaciski odbiornika, tak jak jest to pokazane na Rysunku 4,



Rys. 4. Obwód rezystancyjny z kondensatorem kompensującym moc bierną

o susceptanci równej

$$\omega_1 C = \frac{Q}{U^2} = \frac{49{,}5\times 10^3}{220^2} = 1{,}02\ \text{S}\,,$$

kompensuje całkowicie moc bierną Q odbiornika a więc i prąd bierny i_{1r}. Ponieważ przyjęto, że źródło zasilania jest bezimpedancyjne, kondensator nie zmienia napięcia odbiornika oraz prądu generowanego, i_h, zmieniając prąd źródła zasilania do

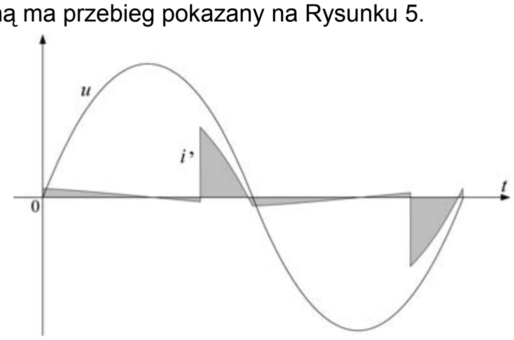
$$i' = i_{1a} + i_h,$$

a jego wartość skuteczną z 66,28 A, do wartości

$$||i'|| = \sqrt{||i_{1a}||^2 + ||i_h||^2} = 62{,}37\ \text{A}\,.$$

Kondensator taki zmniejsza moc pozorną źródła z wartości S = 14,48 kVA do S' = 13,72 kVA, a więc poprawia on współczynnik mocy.

Prąd źródła w obwodzie ze skompensowaną mocą bierną ma przebieg pokazany na Rysunku 5.



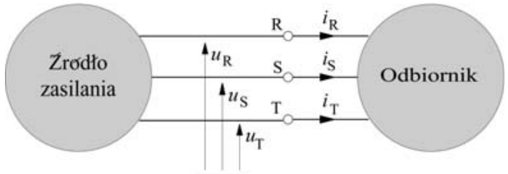
Rys. 5. Przebieg prądu źródła w obwodzie na Rys. 4, ze skompensowaną mocą bierną

Przebieg ten pokazuje, że są takie przedziały czasu, w których prąd źródła ma znak przeciwny niż jego napięcie. W przedziałach tych moc chwilowa źródła jest ujemna, a więc energia płynie do źródła. Oznacza to, że kompensacji mocy biernej Q i wynikającej stąd poprawie współczynnika mocy źródła towarzyszy pojawienie się oscylacji energii między źródłem a skompensowanym odbiornikiem.

Wniosek ten wydaje się podważać rozpowszechniony w elektrotechnice pogląd, że obniżanie się współczynnika mocy powodowane jest oscylacjami energii między źródłem a odbiornikiem. W analizowanym obwodzie jest odwrotnie. Poprawie współczynnika mocy towarzyszy pojawienie się oscylacji energii. Jednak wniosek, że współczynnik ten można poprawiać wprowadzając do obwodu oscylacje energii byłby równie błędny jak wniosek, że oscylacje te pogaszaję ten współczynnik. Bardziej przekonywujący jest raczej wniosek, że oscylacje energii nie mają ze współczynnikiem mocy, to jest z mocami nieaktywnymi, nic wspólnego.

O ile właściwości energetyczne analizowanego powyżej obwodu są interesujące głównie ze względów poznawczych, gdyż obwody takie nie są raczej budowane jako układy dużej mocy, to kwestia istnienia oscylacji energii w obwodach trójfazowych ma pierwszorzędne znaczenie.

Autor niniejszego artykułu zwrócił uwagę w publikacji [2] na to, że w zrównoważonym obwodzie trójfazowym, pokazanym na Rys. 6, z sinusoidalnym i symetrycznym napięciem zasilania



Rys. 6. Obwód trójfazowy

moc chwilowa

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u_R(t)\, i_R(t) + u_S(t)\, i_S(t) + u_T(t)\, i_T(t) \equiv P = \text{const.}, \quad (2)$$

jest stała, niezależnie od wartości mocy biernej odbiornika, a więc nie ma w takim obwodzie oscylacji energii między źródłem a odbiornikiem trójfazowym. W odpowiedzi na tę obserwację, Prof. Emanuel napisał w 2005 roku artykuł [5], w którym stwierdza: "...*since nonactive power in the form of reactive power Q is also present and since Q affects the line power loss, the lack of oscillation of energy seems doubtful*, *hinting that the above conclusion needs to be carefully probed.*"Jest to opinia ważka dla środowiska elektrotechnicznego, gdyż Prof. Emanuel kieruje komitetem IEEE, który w 2000 roku opracował IEEE-Trial Standard 1459, dotyczący definicji wielkości energetycznych.

Do wykazania, że pomimo wyniku (2), moc bierna jest skutkiem oscylacji energii, w artykule [5] zostało użyte Twierdzenie Poyntinga. Niestety, zostało ono użyte w sposób błędny i nie dostarcza żadnych argumentów na rzecz istnienia zwiąku między oscylacją energii a mocą bierną. Istota tego błędu wyjaśniona jest poniżej.

Twierdzenie Poyntinga a moce nieaktywne

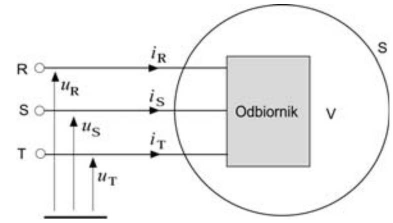
Twierdzenie Poyntinga, dla przestrzeni V ograniczonej powierzchnią S, ma postać

$$\int_V \vec{E}\bullet\vec{j}\,dV = -\int_V \left(\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)dV - \oiint_S (\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{S}\ ,$$

gdzie $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$ oraz $\vec{j}$ są, odpowiednio, wektorami pola magnetycznego, gęstości strumienia magnetycznego, natężenia pola elektrycznego, indukcji elektrycznej oraz gęstości prądu. Pierwsza całka określa energię pola przepływowego prądu przekształconą na ciepło, druga całka określa przyrost energii pola elektrycznego i magnetycznego, zaś ostatnia całka określa prędkość przepływu energii do przestrzeni V przez powierzchnię S, to jest strumień wektora Poyntinga przez tę powierzchnię.

Jeśli obwód elektryczny może być zamknięty w przestrzeni V łączącej się, elektrycznie, z przestrzenią zewnętrzną tylko poprzez zaciski wejściowe tego obwodu, a jego wymiary geometryczne są małe w porównaniu z długością fal elektromagnetycznych w tym obwodzie, a zatem energia promieniowana obwodu może być pominięta w porównaniu z energią dostarczaną poprzez zaciski obwodu, to strumień wektora Poyntinga jest równy mocy chwilowej $p(t)$ na zaciskach tego obwodu. W szczególności, dla obwodu trójfazowego pokazanego na Rysunku 7, strumień wektora Poyntinga przez powierzchnię S, jest niczym innym, jak tylko prędkością przepływu energii do takiego odbiornika, a więc jego mocą chwilową, to jest

$$\oiint_S (\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{S} = \oiint_S \vec{P}\bullet d\vec{S} = \frac{dW}{dt} = u_R i_R + u_S i_S + u_T i_T = p(t)\,.$$

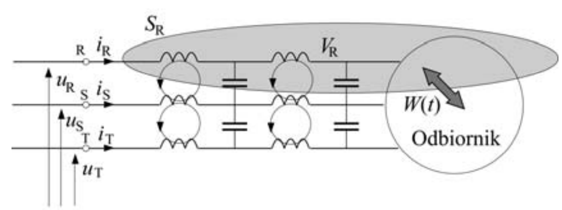


Rys. 7. Przestrzeń V i powierzchnia S obejmująca odbiornik trójfazowy

Zatem Twierdzenie Poyntinga, zastosowane do obwodu o jednoznacznie określonych zaciskach wejściowych, przy założeniu, że obwód ten nie promieniuje energii elektromagnetycznej poprzez zamykającą go powierzchnię S, dostarcza takiej samej informacji o przepływie energii, jak przebieg mocy chwilowej na zaciskach tego obwodu. Tak więc, Twierdzenie to nie może dać wyniku innego, niż wynik określony równaniem (2). Bardziej szczegółowe rozważania na temat relacji między Wektorem oraz Twierdzeniem Poyntinga a teorią mocy może Czytelnik znaleźć w pracy [8].

Prof. Emanuel, powołując się w artykule [5] na właściwości Wektora Poyntinga wokół poszczególnych zacisków zasilania odbiornika wnioskuje, że moce chwilowe indywidualnych faz odbiornika trójfazowego, to jest wyrażenia typu $u_R(t)i_R(t)$, $u_S(t)i_S(t)$, $u_T(t)i_T(t)$, mają w obecności mocy biernej Q składową oscylującą.

Błędność tego wniosku wynika stąd, że z uwagi na sprzężenia elektryczne oraz magnetyczne w lini zasilającej a także sprzężenia i możliwe połączenia międzyfazowe w odbiorniku, pojedyncza faza obwodu trójfazowego nie może być ograniczona powierzchnią, tak jak to jest pokazane na Rysunku 8, izolującą energetycznie tę fazę od reszty układu.



Rys. 8. Hipotetyczne wydzielenie jednej fazy z odbiornika trójfazowego

Tak więc, pojedynczy iloczyn wielkości fazowych, taki jak na przykład, $u_R(t)i_R(t)$, nie określa prądkości przepływu energii do przestrzeni ograniczającej tę fazę. Taki iloczyn nie może być więc traktowany jako moc chwilowa fazy, $dW_R(t)/dt$. Zauważmy ponadto, że napięcie fazowe jest wielkością względną. Dowolny węzeł może być wybrany jako węzeł odniesienia, bez wpływu na prądy i przepływ energii. W szczególności zacisk R może być wybrany jako węzeł odniesienia, a wtedy $u_R(t) \equiv 0,$ i wówczas

$$u_R(t)\, i_R(t) \equiv 0\,.$$

Oznacza to, że odbiornik trójfazowy winien być ze względu na przepływ energii traktowany jako całość, a nie jako trzy odrębne odbiorniki jednofazowe, skojarzone jedynie w odbiornik trójfazowy.

Oscylacje energii a moce w świetle CPC

Teoria mocy oparta na koncepcji Składowych Fizycznych Prądu (ang. Currents' Physical Components, CPC), opisuje liniowy obwód trójfazowy z sinusoidalnym, symetrycznym napięciem zasilania kolejności dodatniej, w sposób następujący.

Napięcia względem punktu neutralnego na zaciskach zasilania odbiornika mogą być uporządkowane w wektor trójfazowy, o postaci

$$\boldsymbol{u} \triangleq \begin{bmatrix} u_{\mathrm{R}} \\ u_{\mathrm{S}} \\ u_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{\mathrm{R}} \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}} \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} e^{j\omega_1 t} \triangleq \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\boldsymbol{U}\, e^{j\omega_1 t},$$

i wartości skutecznej

$$||\boldsymbol{u}|| \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t)\,dt} = \sqrt{U_{\mathrm{R}}^2 + U_{\mathrm{S}}^2 + U_{\mathrm{T}}^2}\ .$$

Podobnie mogą być uporządkowane prądy fazowe

$$\boldsymbol{i} \triangleq \begin{bmatrix} i_{\mathrm{R}} \\ i_{\mathrm{S}} \\ i_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{\mathrm{R}} \\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{S}} \\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} e^{j\omega_1 t} \triangleq \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\boldsymbol{I}\, e^{j\omega_1 t}.$$

Jeśli odbiornik ma admitancje międzyfazowe $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{ST}}$, $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{TR}}$, $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{RS}}$, to wektor prądu zasilania ma trzy składowe.

Prąd czynny

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{a}} \triangleq \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{G_{\mathrm{e}}\,\boldsymbol{U}\,e^{j\omega_1 t}\},$$

gdzie

$$G_{\mathrm{e}} \triangleq \frac{P}{||\boldsymbol{u}||^2} = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{ST}} + \boldsymbol{Y}_{\mathrm{TR}} + \boldsymbol{Y}_{\mathrm{RS}}\},$$

prąd bierny

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{r}} \triangleq \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{\,jB_{\mathrm{e}}\,\boldsymbol{U}\,e^{j\omega_1 t}\},$$

gdzie

$$B_{\mathrm{e}} \triangleq -\frac{Q}{||\boldsymbol{u}||^2} = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{ST}} + \boldsymbol{Y}_{\mathrm{TR}} + \boldsymbol{Y}_{\mathrm{RS}}\},$$

oraz ***prąd niezrównoważenia,***

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{u}} \triangleq \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{U}^{\#} e^{j\omega_1 t}\},$$

gdzie

$$\boldsymbol{A} \triangleq Ae^{j\Psi} \triangleq -(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{ST}} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{TR}} + \boldsymbol{\alpha}^{*}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{RS}}), \qquad \boldsymbol{\alpha} \triangleq 1\,e^{j120^0},$$

jest admitancją niezrównoważenia odbiornika, oraz

$$\boldsymbol{U}^{\#} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{\mathrm{R}} \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}} \end{bmatrix}.$$

Prądy te, zwane ***składowymi fizycznymi prądu*** zasilania, spełniają tożsamość

$$\boldsymbol{i} \equiv \boldsymbol{i}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{u}},$$

i są wzajemnie ortogonalne. Oznacza to, że ich iloczyn skalarny, zdefiniowany ogólnie dla wektorów trójfazowych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jako

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (x_{\mathrm{R}}\,y_{\mathrm{R}} + x_{\mathrm{S}}\,y_{\mathrm{S}} + x_{\mathrm{T}}\,y_{\mathrm{T}})\,dt,$$

jest równy zeru. Ze względu na ortogonalność, wartości skuteczne składowych fizycznych prądu spełniają relację

$$||\boldsymbol{i}||^2 = ||\boldsymbol{i}_{\mathrm{a}}||^2 + ||\boldsymbol{i}_{\mathrm{r}}||^2 + ||\boldsymbol{i}_{\mathrm{u}}||^2\,.$$

Mnożąc to równanie przez kwadrat wartości skutecznej wektora napięć zasilania, otrzymuje się równanie mocy odbiornika trójfazowego

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2\,.$$

W równaniu tym są dwie moce nieaktywne. ***Moc bierna***

$$Q \triangleq \pm||\boldsymbol{u}||\cdot||\boldsymbol{i}_{\mathrm{r}}|| = -B_{\mathrm{e}}\,||\boldsymbol{u}||^2,$$

oraz ***moc niezrównoważenia***

$$D \triangleq ||\boldsymbol{u}||\cdot||\boldsymbol{i}_{\mathrm{u}}|| = A\,||\boldsymbol{u}||^2\,.$$

Te dwie, nieaktywne moce towarzyszą prądowi biernemu i prądowi niezrównoważenia. Pytanie, czy mogą być one stowarzyszone także z oscylacją energii zostało po raz pierwszy postawione w artykule [9].

Prędkość przepływu energii ze źródła zasilania do odbiornika trójfazowego, to jest moc chwilowa tego odbiornika może być przedstawiona jako suma mocy chwilowych stowarzyszonych ze składowymi fizycznymi prądu, mianowicie

$$\frac{dW(t)}{dt} = p(t) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{u}}) \triangleq p_{\mathrm{a}}(t) + p_{\mathrm{r}}(t) + p_{\mathrm{u}}(t)\,.$$

Przyjmując, że wektor napięcia zasilania ma przebieg

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_{\mathrm{R}} \\ u_{\mathrm{S}} \\ u_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,U\begin{bmatrix} \sin\omega_1 t \\ \sin(\omega_1 t - 120^0) \\ \sin(\omega_1 t + 120^0) \end{bmatrix},$$

a zatem,

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} i_{\mathrm{Ra}} \\ i_{\mathrm{Sa}} \\ i_{\mathrm{Ta}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,G_{\mathrm{e}}U\begin{bmatrix} \sin\omega_1 t \\ \sin(\omega_1 t - 120^0) \\ \sin(\omega_1 t + 120^0) \end{bmatrix},$$

otrzymujemy przebieg mocy chwilowej stowarzyszonej z prądem czynnym

$$p_{\mathrm{a}}(t) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_{\mathrm{a}} = 3G_{\mathrm{e}}U^2 = P = \mathrm{const.}$$

Wynik ten oznacza, że przepływ energii ze źródła do odbiornika, związany wyłącznie z jego mocą czynną P, nie jest stowarzyszony z oscylacją energii.

Przy przyjetym napięciu zasilania, prąd bierny ma przebieg

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} i_{\mathrm{Rr}} \\ i_{\mathrm{Sr}} \\ i_{\mathrm{Tr}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,B_{\mathrm{e}}U\begin{bmatrix} \cos\omega_1 t \\ \cos(\omega_1 t - 120^0) \\ \cos(\omega_1 t + 120^0) \end{bmatrix}.$$

Stąd, przebieg mocy chwilowej stowarzyszonej z prądem biernym

$$p_{\mathrm{r}}(t) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_{\mathrm{r}} \equiv 0.$$

Wynik ten oznacza, że nie ma między źródłem a odbiornikiem przepływu energii związanego z istnieniem w obwodzie prądu biernego $\boldsymbol{i}_{\mathrm{r}}$ a zatem i mocy biernej Q.

Przy przyjętym napięciu, prąd niezrównoważenia ma przebieg

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} i_{\mathrm{Ru}} \\ i_{\mathrm{Su}} \\ i_{\mathrm{Tu}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,AU\begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \Psi) \\ \sin(\omega_1 t + \Psi + 120^0) \\ \sin(\omega_1 t + \Psi - 120^0) \end{bmatrix}.$$

Stąd, przebieg mocy chwilowej stowarzyszonej z pradem niezrównoważenia

$$p_{\mathrm{u}}(t) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_{\mathrm{u}} = -3AU^2\cos(2\omega_1 t + \psi) = -D\cos(2\omega_1 t + \psi)\,.$$

Zatem oscylacje energii towarzyszą wyłącznie prądowi niezrównoważenia.

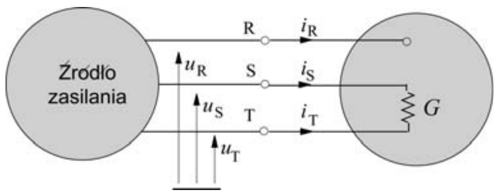
Moc chwilowa odbiornika trójfazowego zasilanego symetrycznym, sinusoidalnym napięciem trójfazowym o sinusoidalnym prądzie zasilania, może więc być przedstawiona w postaci

$$\frac{dW(t)}{dt} = p(t) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i} = P - D\cos(2\omega_1 t + \psi)\ .$$

Jedyną przyczyną oscylacji energii między źródłem zasilania a odbiornikiem może być tylko asymetria prądów fazowych, to jest niezerowa moc niezrównoważenia D. Mocy biernej Q takie oscylacje nie towarzyszą.

Można jednak postawić pytanie, czy można za zmniejszanie współczynnika mocy winić oscylacje energii towarzyszące mocy niezrównoważenia D?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozważmy obwód przedstawiony na Rysunku 9.



Rys. 9. Rezystancyjny obwód trójfazowy

W obwodzie takim

$$G_{\mathrm{e}} = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{ST}}\} = G, \qquad \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Y}_{\mathrm{ST}} = G\,e^{j180^0},$$

a więc moc czynna i moc niezrównoważenia mają takie same wartości

$$P = G_{\mathrm{e}}\,||\boldsymbol{u}||^2 = GU^2,$$

$$D = A||\boldsymbol{u}||^2 = GU^2.$$

Współczynnik mocy obwodu wynosi

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + D^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71\ ,$$

a moc chwilowa

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = P - D\cos(2\omega_1 t + \psi) = P(1 + \cos 2\omega_1 t)\ ,$$

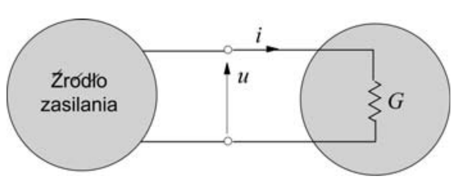
ma przebieg pokazany na Rysunku 10.

Rys. 10. Przebieg mocy chwilowej odbiornika pokazanego na Rys. 9

Dokładnie taki sam przebieg mocy chwilowej ma odbiornik jednofazowy pokazany na Rys. 11, zasilany napięciem

$$u(t) = \sqrt{2}\,U\cos\omega_1 t\,,$$

i, oczywiście, o współczynniku mocy równym jedności.



Rys. 11. Rezystancyjny obwód jednofazowy o takim samym przebiegu mocy chwilowej jak obwód trójfazowy na Rys. 9

Nie można więc winić składowej oscylacyjnej mocy chwilowej za mniejszy od jedności współczynnik mocy obwodu trójfazowego. Przyczyną zmniejszenia się współczynnika mocy w obwodzie na Rysunku 9 jest tylko obecność prądu niezrównoważenia $\boldsymbol{i}_{\mathrm{u}}$ w prądzie zasilania.

Podobnie, przyczyną obniżania współczynnika mocy w obwodach jednofazowych z sinusoidalnym prądem i napięciem, w obecności mocy biernej Q, nie jest oscylacja energii, lecz tylko prąd bierny, $\boldsymbol{i}_{\mathrm{r}}$, będący skutkiem przesunięcia fazowego prądu względem napięcia. Widać to szczególnie wyraźnie wtedy, gdy moc chwilową w takim obwodzie wyrazi się w postaci

$$p(t) = P - P\cos 2\omega_1 t + Q\sin 2\omega_1 t \ = P - p_{\mathrm{P}}(t) + p_{\mathrm{Q}}(t)\ ,$$

a więc w postaci, w której wyraźnie widać dwa składniki oscylacyjne, $p_{\mathrm{P}}(t)$ oraz $p_{\mathrm{Q}}(t)$. Pomimo, że nie ma między nimi istotnej, poza przesunięciem, różnicy, pierwszy z tych składników nie obniża współczynnika mocy. W rzeczywistości nie obniża go także i drugi składnik, lecz czyni to prąd bierny, któremu ten składnik towarzyszy.

Wnioski

Obniżanie współczynnika mocy w obwodach z sinusoidalnym napięciem zasilania nie jest powodowane oscylacją energii między źródłem zasilania a odbiornikiem, lecz pojawianiem się w prądzie zasilania innych składowych niż tylko prąd czynny. Mogą to być prąd bierny, związany z przesunięciem fazowym prądu względem napięcia, prąd harmoniczny, generowany w odbiorniku wskutek okresowych zmian jego parametrów lub też prąd niezrównoważenia, związany z asymetrią prądów fazowych.

LITERATURA

[1] Czarnecki L.S., Misinterpretations of some power properties of electric circuits, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 9, No. 4, (1994), 1760-1770.

[2] Czarnecki L.S., Energy flow and power phenomena in electrical circuits: illusions and reality, Archiv fur Elektrotechnik, (82), No. 4, (1999), 10-15.

[3]. Ferrero A., Leva S., Morando A.P., An approach to the nonactive power concept in terms of the Poynting-Park Vector, European Trans. on Electric Power, ETEP, Vol. 11, no. 5, (2001), 301-308.

[4] Cekareski Z., Emanuel A.E., On the physical meaning of nonactive powers in three-phase systems, Power Engineering Review, IEEE, Vol.19, No.7, (1999), 46-47.

[5] Emanuel A.E., Poynting Vector and physical meaning of nonactive powers, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 54, No. 4, (2005), 1457-1462.

[6] Czarnecki, L.S., Currents' Physical Components (CPC) in circuits with nonsinusoidal voltages and currents. Part 1: Single-phase linear circuits, Journal on Electric Power Quality and Utilization, Vol. XI, No. 2, (2005), 37-48. Part 2: Three-phase linear circuits. Artykuł przyjęty do druku w 2006.

[7] Czarnecki L.S., Harmonics and power phenomena, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, John Wiley & Sons, Supplement 1, (2000), 195-218.

[8] Czarnecki L.S., Could power properties of three-phase systems be described in terms of the Poynting Vector? IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 21, No. 1, (2006), 339-344.

[9] Czarnecki L.S., On some misinterpretations of the Instantaneous Reactive Power p-q Theory, IEEE Trans. on Power Electronics, vol. 19, no. 3, (2004), 828-836.

Autor: Prof. dr. hab. Leszek S. Czarnecki, Fellow IEEE, MIEE, Alfredo M. Lopez Distinguished Professor of Electrical Engineering, Electrical and Computer Engineering Department, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70808, E-mail: lsczar@cox.net, Internet Page: www.lsczar.info